Université Grenoble Alpes **Année 2022-2023**
Licence de mathématiques, 3e année **Calcul différentiel, parcours A**

Contrôle continu numéro 2
28 mars 2023

On rappelle que si E, F sont deux espaces de Banach et $f : E \to F$ est C^{p+1}, alors pour tout $a, h \in E$,

$$f(a+h) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!} d^j f(a)(h, \cdots, h) + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} d^{p+1} f(a+th)(h, \cdots, h) dt.$$

Exercice 1 Soient $k, n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ une fonction C^2. On suppose que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \| d^2 f(x) \| \leqslant \|x\|.$$

On rappelle que pour une application bilinéaire A,

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1} \|A(x,y)\|.$$

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(0) - df(0)x\| \leqslant \frac{1}{2}\|x\|^3.$$
On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.
Corrigé. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $p = 1$ appliquée à l'origine montre
$$\begin{aligned} \|f(x) - f(0) - df(0)x\| &= \| \int_0^1 \frac{1-t}{1!} d^2 f(tx)(x,x) dt \| \\ &\leqslant \max_{t \in [0,1]} (\|d^2 f(tx)\|) \ \| x \|^2 \int_0^1 (1-t) \\ &\leqslant \frac{1}{2} \| x \|^3 . \end{aligned}$$

2. En utilisant la caractérisation des sous-variétés par les submersions, montrer que le graphe Γ_f de f définit par
$$\Gamma_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, y = f(x)\}$$
est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+k}$.

   Corrigé. Soit $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $F(x,y) = y - f(x)$. On a F C^1 car f l'est et $d_y F = dy$ donc dF est surjective. Donc Γ_f est une sous-variété de dimension n dans $\mathbb{R}^{n+k}$.

3. Déterminer une équation du plan tangent $T := T_{(0,f(0))}\Gamma_f$.

   Corrigé. On a $dF = dy - df(x)$ donc pour tout $(a,b) \in \Gamma_f$ et tout $(x,y) \in \mathbb{R}^{n+k}$, $(x,y) \in T_{a,b}\Gamma_f$ ssi $(x-a, y-b) \in \ker dF(a,b)$, soit

$$y = f(0) + df(0)x.$$

4. Montrer que pour tout point $(x,y) \in \Gamma_f$, la distance de (x,y) à T est plus petite que $C'\|x\|^3$, où C est une constante qu'on déterminera.

   Corrigé. Cette distance est majorée par la distance de $(x,y) \in \Gamma_f$ au point $(x, f(0) + df(0)x)$ de T et cette distance égale à $|f(x) - f(0) - df(0)x|$ vaut au plus $\dfrac{1}{2} \parallel x \parallel^3$ par la question 1. On peut donc prendre $C = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \exp(x^2+y^2) + x + y$.

1. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^2$, tel que $f(a) = \inf f$.

   Corrigé. Les majorations triviales $|x+y| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}$ montrent la minoration
$$f(x,y) \geqslant \exp(x^2+y^2) - 2\sqrt{x^2+y^2}$$
   de $f(x,y)$ par la fonction radiale
$$\rho \longmapsto g(\rho) = \exp\rho^2 - 2\rho$$
   avec $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Comme $\lim\limits_{\rho\to\infty} g(\rho) = +\infty$ la fonction f n'est pas bornée supérieurement.

   Soit alors $R > 0$ tel que pour tout
$$\|x,y\| \geqslant R, f(x,y) > f(0,0) + 1.$$
   R existe car $f \to +\infty$ en l'infini. Alors
$$\inf f = \inf(\inf_{\bar{B}(0,R)} f, \inf_{\bar{B}^c((0,0),R)} f) = \inf_{\bar{B}((0,0),R)} f.$$
   Comme $\bar{B}((0,0),R)$ est un compact dans $\mathbb{R}^2$ de dimension finie, et f continue, f admet un minimum en $a \in \bar{B}$.

2. Montrer qu'il existe un unique point critique b de f sur $\mathbb{R}^2$. Déterminer sans calcul si c'est un extremum et si c'est le cas, si c'est un minimum ou un maximum. Quels sont les extremas locaux et globaux de f (on ne demande pas les coordonnées précises des points) ?

Corrigé. Si le gradient de f, donnée par

$$(1 + 2x \exp(x^2 + y^2), 1 + 2y \exp(x^2 + y^2))$$

s'annulle, on a

$$1 + 2x \exp(x^2 + y^2) = 1 + 2y \exp(x^2 + y^2) = 0$$

ce qui implique $x = y$ et $2x \exp(2x^2) = -1$ pour un point critique (x, y) de f. Comme

$$x \longmapsto 1 + 2x \exp(2x^2)$$

est de dérivée $\exp(x^2 + y^2)(2 + 8x^2) > 0$, elle est strictement croissante. De plus elle est continue et vérifie

$$\lim_{x \to \pm\infty} 1 + 2x \exp(2x^2) = \pm\infty.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, elle n'a qu'un solution, donc la fonction f n'a qu'un unique point critique de la forme $b = (x, x)$.

Si donc a est un extremum local, $a = b$. Or il existe un minimum global a, donc $a = b$ et b est l'unique extremum local (qui est donc un minimum global).

3. Calculer le signe du déterminant de la hessienne de f en b et sa trace. En déduire le signe des valeurs propres de la hessienne.

   Corrigé. La hessienne de f est donnée par

$$\exp(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} 2 + 4x^2 & 4xy \\ 4xy & 2 + 4y^2 \end{pmatrix}$$

   de déterminant $(\exp(x^2 + y^2))^2(4 + 8(x^2 + y^2)) > 0$.

   Ses deux valeurs propres (réelles car la hessienne d'une fonction C^2 est symétrique donc diagonalisable avec valeurs propres réelles) sont donc de même signe donné par le signe de sa trace $4 \exp(x^2 + y^2)(1 + 2x^2 + 2y^2) > 0$.

Exercice 3

Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$, $M = \{x \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i^{2k} = 1\}$ et

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \prod_{i=1}^{n} x_i. \end{array}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble $\{y \in \mathbb{R}, y^{2k} = x^{2k}\}$.

   Corrigé. Si $x = 0$ l'ensemble est réduit à $y = x = 0$. Si $x \neq 0$, l'équation devient $(y/x)^{2k} = 1$, qui implique $|x/y|^{2k} = 1$. L'application $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto t^{2k}$ est strictement croissante donc injective. Donc si $x \neq 0$, si $|y| = |x|$ donc $y = \pm x$. Réciproquement, si $y = \pm x$ alors $y^2 = x^2$ et $y^{2k} = x^{2k}$. L'ensemble est donc réduit à $\{\pm x\}$.

2. Montrer que M est une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$. Quelle est la dimension de M ?

   Corrigé. Pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ dans M, pour tout $i \in \{1, \cdots n\}, x_i^{2k} \in [0,1]$, donc $|x_i| \leqslant 1$ et donc M est un sous-ensemble du compact $[0,1]^n$. L'application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sum x_i^{2k} - 1$ est continue car polynomiale, donc $M = \{g = 0\}$ est un fermé du compact $[-1,1]^n$. L'ensemble M est donc compact.

   D'autre part
   $$\mathrm{grad}(\sum_{i=1}^{n} x_i^{2k}) = 2k(x_1^{2k-1}, \ldots, x_n^{2k-1})$$
   ne s'annulle qu'à l'origine qui n'appartient pas à M.

   Le compact M est donc une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$, de dimension $n-1$.

   0,5 PTS dimension

3. Montrer que $f_{|M}$ admet un minimum et un maximum distincts.

   Corrigé. $f_{|M}$ est une fonction continue (car polynomiale) sur un compact et atteint donc son inf et son sup. De plus elle y est non constante car
   $$f(n^{-\frac{1}{2k}}, \cdots, n^{-\frac{1}{2k}}) = 1 \neq -1 = f(-n^{-\frac{1}{2k}}, \cdots, n^{-\frac{1}{2k}}).$$
   On a utilisé
   $$(\pm n^{-\frac{1}{2k}}, \cdots, \pm n^{-\frac{1}{2k}}) \in M.$$

4. Par la méthode des extremas liés, déterminer $\min f_{|M}$, $\max f_{|M}$.

   L'involution $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \longmapsto (-x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ préserve M et renverse le signe de f. On a donc $\min(f_{|M}) = -\max(f_{|M})$ et on peut se restreindre à l'étude des points $(x_1, \ldots, x_n)$ de M avec $x_1, \ldots, x_n$ tous > 0 (car on peut similairement changer les signes des autres coordonnées, et s'il existe i tel que $x_i = 0$, $f(x) = 0$ donc x n'est pas extrémal à cause de la question 4.).
   Par le théorème des extrema liés, si x est maximal,
   $$\nabla g = 2k(x_1^{2k-1}, \ldots, x_n^{2k-1}) \text{ et } \nabla f = (x_2 \cdots x_n, x_1 x_3 \cdots x_n, \ldots, x_1 \cdots x_{n-1})$$

tous les deux non-nuls et proportionnels.

Donc pour tout i,

$$x_1^{2k-1}\frac{x_1\cdots x_n}{x_i} = x_i^{2k-1}\frac{x_1\cdots x_n}{x_1}$$

ce qui implique $x_1 = \pm x_i$ par la question 1.

pour tout i, donc $x_i = x_1 > 0$. On a donc

$$x_1 = \cdots = x_n = (1/n)^{1/(2k)}$$

pour le maximum et $\max(f_{|M}) = -\min(f_{|M}) = (1/n)^{n/(2k)}$.

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|x_1 \cdots x_n| \leqslant \dfrac{\|x\|_2^n}{\sqrt{n}^n}$.

   L'inégalité est homogène et il suffit donc de la vérifier sur M. Comme $\max(f_{|M}) = -\min(f_{|M}) = (1/n)^{n/(2k)}$ il suffit de montrer l'inégalité sur M. Posons $k = 1$. La sous-variété M est alors la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (pour la norme euclidienne usuelle) et 4. donne l'inégalité

$$|x_1 \cdots x_n| \leqslant 1/n^{n/2}$$

   souhaitée.

6. (Question Bonus) En combien de points $f_{|M}$ atteint-elle son maximum ? On pourra raisonner par récurrence sur n.

   Corrigé. On a $|x_1| = \ldots = |x_n|$ avec un nombre pair de signe moins pour un maximum. Donc 2^{n-1} maxima.

Exercice 4 Soit $g(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2 - 1, x + y + z)$ et $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

1. Montrer que $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x, y, z) = 0\}$ est une sous-variété non bornée de $\mathbb{R}^3$. Quelle est sa dimension ?

   Corrigé. M est la préimage de $(0, 0)$ d'une fonction g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et g est C^1. La Jacobienne

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   de g est de rang 2 sauf en $((x, x, -x)$

   qui n'appartient pas à M car sinon $x + y + z = 0$ implique $x = 0$ mais $x^2 + y^2 - z^2 - 1$ n'est alors plus vrai.

   L'ensemble M est donc une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$.

Pour (x, y, z) dans M on a $z = -x - y$ et

$$x^2 + y^2 - (-x - y)^2 = -2xy = 1$$

et M se projette donc orthogonalement sur les deux branches (qui sont non bornées) de l'hyperbole $xy = -1/2$ dans le plan $z = 0$. Ceci montre que M est non-bornée.

2. Montrer que $f_{|M}(x, y, z) \to \infty$ quand $\|x, y, z\| \to \infty$. En déduire que $f_{|M}$ admet un minimum.

   Corrigé. Comme $x + y + z = 0$ sur M au moins deux coordonnées sont non-bornée dans une suite de points de M dont la norme tend vers $+\infty$. Ceci montre $f_{|M}(x, y, z) \to \infty$ quand $\|x, y, z\| \to \infty$.

   On a vu que $a := (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}) \in M$. Soit $R > 0$ tel que pour tout $x \in M$ et $\|x\| > R$, $f(x) \geqslant f(a)$. R existe car f tend vers l'infini sur M en l'infini. Alors

$$\inf_M f = \inf_{M \cap \bar{B}(0,R)} f.$$

   Comme M est fermé comme lieu d'annulation d'une fonction continue (polynomiale), $M_R := M \cap \bar{B}(0, R)$ est compact, et comme f est continue sur M_R, elle admet un minimum, donc la fonction $f_{|M}$ admet donc bien un minimum.

3. Déterminer ce minimum en utilisant le théorème des extrema liés. On pensera à utiliser un déterminant.

   Corrigé. Par le théorème des extrema liés, si a est un extremum de $f_{|M}$ comme le minimum, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tels que $\nabla f(a) = \lambda \nabla g_1(a) + \nabla g_2(a)$. Comme g est une submersion, c'est vrai si et seulement si

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} = 4z(x - y)$$

   Si $x = y$ alors $z = -2x$ et $(x, x, -2x)$ n'appartient pas à M.

   On a donc $z = 0 = -(x + y)$ et les points critiques sur M sont de la forme $(x, -x, 0)$ ce qui donne $\pm(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$. Le minimum de f sur M vaut donc 1.